Άσκηση 5 (Φυλλάδιο #6)

$(E_0): (2x+1)y'' - 4(x+1)y' + 4y = 0, \quad x > -\frac{1}{2}$

Να εξετάσετε εάν δέχεται λύση των μορφών

$y_1(x) = e^{cx}$ | $x = \frac{1}{2}$

$y_2(x) = ax + \beta$

Λύση

Αντικαθιστώ τις ρίζες $y_1(x), y_2(x)$ στην (E_0) και θα έχουμε 2 εξισώσεις. Η $1^η$ εξίσωση συναρτήσει του c και η $2^η$ συναρτήσει των a και β. Δηλ. θα έχουμε ένα σύνολο βασικών λύσεων (δηλ ένα σύνολο που περιέχει τουλάχιστον 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις)

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Ή μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα Wronski (αρκεί $\neq 0$)

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ας είναι $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}$ γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις που έχουν n-παραγώγους στο I με $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, $x \in I$. Τότε, $\exists !$ γραμμική διαφορική εξίσωση n-τάξης με $a_n = 1$, που να έχει ως ένα βασικό σύνολο λύσεων (ΒΣΛ) το $\{y_1, \dots, y_n\}$. Η εξίσωση αυτή είναι η εξής:

$$(E_0) \quad \frac{W(y_1, \dots, y_n, y)}{W(y_1, \dots, y_n)}(x) = 0, \quad x \in I$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΜΟΝΟ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ

Από την υπόθεση έπεται ότι η (E_0) είναι καλά ορισμένη. Για $x \in I$, έχουμε:

$$0 = \frac{1}{W(y_1, \dots, y_n)(x)} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{W(x)} \cdot \left(W(x) \cdot y^{(n)} - y^{(n-1)} W_{n-1}(x) + \dots + W_0 y \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = y^{(n)} + \dots + \frac{W_0}{W}.$$

Οι $y_1, y_2, \dots, y_n$ είναι λύσεις της εξίσωσης και μάλιστα γραμμικής n-τάξης με $W(y_1, \dots, y_n)(x) \neq 0$

Για το μονοσήμαντο

Έστω ότι $\exists$ δύο δ.ε

(E_0^1): $y^{(n)} + q_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + q_1 y' + q_0 y = 0$, $x \in I$

(E_0^2): $y^{(n)} + r_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + r_1 y' + r_0 y = 0$

ΒΣΛ $\{y_1, \dots, y_n\}$

Αφαιρώ την (E_0^2) από την (E_0^1)

$(q_{n-1} - r_{n-1}) y^{(n-1)} + \dots + (q_1 - r_1) y' + (q_0 - r_0) y = 0$, $x \in I$

(Έστω $(q_k - r_k)(x) \neq 0$)

ας είναι $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ώστε $q_{n-1} - r_{n-1} = 0 = \dots = q_{k+1} - r_{k+1} = 0$, $x \in I$ και $\exists x_0 \in I$: $q_k(x_0) - r_k(x_0) \neq 0$ τότε $\exists I_1 \subseteq I$ με $x_0 \in I$ (ανοιχτό) με $q_k(x) - r_k(x) \neq 0$, $x \in I$

Η εξίσωση (E_0^2) γράφεται:

(E_0^*) $(q_k - r_k) y^{(k)} + \dots + (q_0 - r_0) y = 0$, $(q_k - r_k)(x) \neq 0$, $x \in I$

Δηλαδή οι $y_1, \dots, y_n$ λύσεις της (E_0^*). Άτοπο διότι ένα σύστημα $k<n$ βαθμού δεν μπορεί να έχει n λύσεις. (Δηλ. αφού ΣΒΛ $\{y_1, \dots, y_k\}$ της (E_0^*) άρα η λύση y_n της (E_0^*) θα γράφεται ως (μη τετριμμένος) γραμμ. συνδυασμός των $\{y_1, \dots, y_k\}$. Δηλ. οι συναρτήσεις να είναι γραμμ. εξαρτημένες Άτοπο).

αν $q_i = r_i$, $\forall i = 1, \dots, n-1$
αλλά $q_0 \neq r_0$ τότε $(q_0 - r_0) y = 0$ $\forall y \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow y(x) = 0$ $\forall x \in I \Rightarrow W(x) = 0$, $x \in I$ Άτοπο

ΑΣΚΗΣΗ 6 (ΦΥΛΛΟ #6)

i. Έστω $y_1(x) = x$ και $y_2(x) = x \cdot e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + x \cdot e^x \end{vmatrix} = x^2 \cdot e^x, \quad x>0$$

Η εξίσωση μας είναι η

$$\frac{1}{W(x)} \cdot \begin{vmatrix} x & x e^x & y \\ 1 & e^x + xe^x & y' \\ 0 & 2e^x + xe^x & y'' \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2 e^x} \left(y'' \cdot (x \cdot e^x + x^2 e^x - x e^x) - y' (2xe^x + x^2 e^x) + y(2e^x + xe^x) \right) =$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{(2x + x^2) e^x}{x^2 \cdot e^x} y' + \frac{e^x (2+x)}{x^2 e^x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{2x + x^2}{x^2} \cdot y + \frac{2+x}{x^2} = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ)

Για την ομογενή εξίσωση

$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ (E_0), $a_n(x) \neq 0$, $a_i \in C(I)$

Αν $y_1 \neq 0$ λύση της (E_0) τότε θέτουμε

$\boxed{y = u \cdot y_1}$ οπου ανάγουν την (E_0)

σε εξίσωση $(n-1)$ τάξης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

① $y = u \cdot y_1 \Rightarrow y' = u' \cdot y_1 + u y_1'$ ② $\Rightarrow y'' = u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1''$ ③

$\Rightarrow y''' = u''' \cdot y_1 + 3u'' y_1' + 3u' y_1'' + u \cdot y_1'''$ ④ $\Rightarrow \dots$

$\dots \Rightarrow y^{(n)} = u^{(n)} y_1 + n \cdot u^{(n-1)} y_1' + \dots + n u' y_1^{(n-1)} + u \cdot y_1^{(n)}$ ⓝ

και πολλ/ζω την καθε σχεση (①, ②, ③, ④, ..., ⓝ)

αντίστοιχως με $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

και εχω:

$u \underbrace{[a_0 y_1 + a_1 y_1' + a_2 y_1'' + \dots + a_n y^{(n)}]}_{\to 0 \text{ (αφου } y_1 \text{ λυση)}} +$

$+ u' \underbrace{[a_1 y_1 + 2 a_2 y_1 + n a_n y_1^{(n-1)}]}_{A_0} + \dots + \underbrace{a_n}_{A_n} u^{(n)} = 0 \Rightarrow$

$\rightsquigarrow A_0 u' + A_1 u'' + \dots + A_n \cdot u^{(n)} = 0$

Θετω

$z = u'$

$A z + A_1 z' + \dots + A_n z^{(n-1)} = 0$ (E_0^*)

Γραμμική Δ.Ε

– Αν $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ είναι ΒΣΛ της (E_0^*)

τοτε το συνολο $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι ενα

ΒΣΛ της (E_0) οπου

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} V_{i-1}(s)\,ds, \quad x \in I, \quad i = 2, \dots, n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$: $c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$, $x \in I$

$\cancel{y_1(x)} \left[c_1 + c_2 \int_{x_0}^{x} z_1(s)\,ds + c_3 \int_{x_0}^{x} z_2(s)\,ds + \dots + c_n \int_{x_0}^{x} z_{n-1}(s)\,ds \right] = 0$

$\neq 0$

$c_2 z_1(x) + \dots + c_n z_{n-1}(x) = 0 \rightsquigarrow c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

ΑΣΚ 7, 8 ΦΥΛΛΟ #6 ← (Να γίνουν)